第５講　ド・モワブルと不等式，増減と有理数解，回転体を平面で切る

13　n 自然数とする．

(1)　n 個の複素数 z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0 \leqq \arg z_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたすならば，不等式

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

が成り立つことを示せ．

(2)　n 個の実数 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0 \leqq \theta_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$ をみたすならば，不等式

$$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

が成り立つことを示せ．

《04 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14　次の問に答えよ.

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^x\ (x\neq 0)$ について, $f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ.

(2)　方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ.

(3)　方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ.

《15 名大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　$a>0$ とする．曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに１回転してできる回転体を A とする．

⑴　A の体積 V を求めよ．

⑵　点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds$$

を示せ．

⑶　不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx$$

を示せ．

《15 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　ド・モワブルと不等式，増減と有理数解，回転体を平面で切る

13　n 自然数とする．

(1)　n 個の複素数 z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0\leqq \arg z_k\leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたすならば，不等式

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2\leqq|z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

が成り立つことを示せ．

(2)　n 個の実数 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0\leqq\theta_k\leqq\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$

をみたすならば，不等式

$$\sqrt{n-1}\leqq\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

が成り立つことを示せ．

《04 阪大・理系》

【答】(1)　略　　(2)　略

【解説】　以下，虚数単位を i とする．

(1)　$n=1$ のとき，与式は明らかに成り立つ．

$n=k\ (\geqq 1)$ のとき $|z_1+z_2+\cdots+z_k|^2\geqq|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_k|^2$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
&|z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1}|^2\\
&=(z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1})\overline{(z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1})}\\
&=|z_1+z_2+\cdots+z_k|^2+z_{k+1}\overline{(z_1+z_2+\cdots+z_k)}+\overline{z_{k+1}}(z_1+z_2+\cdots+z_k)+|z_{k+1}|^2\\
&\geqq|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_k|^2+|z_{k+1}|^2+\sum_{l=1}^{k}(z_{k+1}\overline{z_l}+\overline{z_{k+1}z_l})
\end{aligned}$$

であるが，$0\leqq\arg z_{k+1}\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\arg\overline{z_l}\leqq 0$ より $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\arg(z_{k+1}\overline{z_l})\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なので

$z_{k+1}\overline{z_l}$ の実部つまり $\dfrac{z_{k+1}\overline{z_l}+\overline{z_{k+1}z_l}}{2}$ は 0 以上．よって $z_{k+1}\overline{z_l}+\overline{z_{k+1}}z_l\geqq 0$ なので

$$\sum_{l=1}^{k}(z_{k+1}\overline{z_l}+\overline{z_{k+1}}z_l)\geqq 0$$

ゆえに $|z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1}|^2\geqq|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_k|^2+|z_{k+1}|^2$ となり，$n=k+1$ のときにも与式は成り立つので，任意の自然数 n について

$|z_1+z_2+\cdots+z_n|^2\geqq|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2$ が成り立つことが示された．

(2)　$z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおくと

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k=\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=1+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$ であり，$|z_k|=1$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2=n$ なので，

(1)の結果を用いると

$$n\leqq\left|1+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\right|^2=1+\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\right)^2$$

となり，$0\leqq\theta_k\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\geqq 0$ なので $\displaystyle\sqrt{n-1}\leqq\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$ が示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14 次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)=x^{-2}2^x\ (x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ．

(2) 方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ．

(3) 方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ．

《15 名大・理系》

【答】 (1) $x<0,\ \dfrac{2}{\log 2}<x$ (2) 略 (3) $x=2,\ 4$

【解説】 (1) $f'(x)=-2x^{-3}2^x+x^{-2}\cdot(\log 2)2^x=\dfrac{2^x}{x^3}\{(\log 2)x-2\}>0$ より

$\boldsymbol{x<0,\ \dfrac{2}{\log 2}<x}$.

(2) 方程式 $2^x=x^2$ は $x=0$ を解にもたないので，両辺を x^2 で割ることにより

$2^x=x^2 \iff f(x)=1$ を得る．(1)の結果と $f'(x)=0 \iff x=\dfrac{2}{\log 2}$ より $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

ここで $f(-1)=\dfrac{1}{2}<1$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}>1$，$f(2)=f(4)=1$ より，方程式 $f(x)=1$ は相異なる 3 個の実数解をもつ．

(3) $f(2)=f(4)=1$ より，$2^x=x^2$ の解のうち $x=2,\ 4$ は有理数解である．

$2^x=x^2$ の残りの解は，$f(-1)=\dfrac{1}{2}<1$ と $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}>1$ より $-1<x<0$ に存在するが，この解を α として，α が有理数であると仮定すると $\alpha=-\dfrac{m}{l}$ (l と m は互いに素な自然数で $m<l$) と表せ，

$$2^\alpha=\alpha^2 \iff 2^{-\frac{m}{l}}=\left(-\frac{m}{l}\right)^2$$
$$\iff l^2=m^2 2^{\frac{m}{l}}$$
$$\iff l^{2l}=m^{2l}2^m \quad \cdots①$$

ここで m は自然数，l は自然数より，$m^{2l}2^m$ は偶数なので，l^{2l} つまり l は偶数．よって自然数 k を用いて $l=2k$ と表せるので，

$$① \iff (2k)^{2l}=m^{2l}2^m$$
$$\iff 2^{2l-m}k^{2l}=m^{2l}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで $m<l$ より $2l-m$ は自然数，k，l は自然数より $2^{2l-m}k^{2l}$ は偶数となるので，m^{2l} つまり m は偶数となるが，これは l と m が互いに素であることに矛盾.

よって α は有理数ではない実数なので無理数.

以上より，求める有理数解は $\boldsymbol{x=2,\ 4}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　$a>0$ とする．曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに１回転してできる回転体を A とする．

(1)　A の体積 V を求めよ．

(2)　点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds$$

を示せ．

(3)　不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx$$

を示せ．

《15 東工大・理系》

【答】　(1)　$\pi(1-e^{-a^2})$　　(2)　略　　(3)　略

【解説】　(1)　$k=e^{-a^2}$ とおくと，$\log k=-a^2$ などに注意すると

$$\begin{aligned}V&=\int_{k}^{1}\pi x^2dy+a^2\pi\cdot k=\int_{k}^{1}\pi(-\log y)dy+a^2k\pi\\&=\pi\left(-\Big[y\log y-y\Big]_{k}^{1}+a^2k\right)=\pi(1+k\log k-k+a^2k)\\&=\boldsymbol{\pi(1-e^{-a^2})}\end{aligned}$$

(2)　(1)の k を用いると，$k\leqq y\leqq 1$ のとき，$y=e^{-x^2}$ より $x^2=-\log y$ となるので，回転体 A は $\begin{cases}x^2+z^2\leqq-\log y & (k\leqq y\leqq 1)\\ x^2+z^2\leqq a^2 & (0\leqq y<k)\end{cases}$ と表すことができる．この式において $x=t$ と代入することで

$$\begin{cases}t^2+z^2\leqq-\log y & (k\leqq y\leqq 1)\\ t^2+z^2\leqq a^2 & (0\leqq y<k)\end{cases}\iff\begin{cases}y\leqq e^{-(t^2+z^2)} & (k\leqq y\leqq 1)\\ -\sqrt{a^2-t^2}\leqq z\leqq\sqrt{a^2-t^2} & (0\leqq y<k)\end{cases}$$

この部分の面積が $S(t)$ なので $S(t)=\displaystyle\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(t^2+z^2)}dz$．ここで $\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$ で $e^{-(t^2+z^2)}>0$ より

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(t^2+z^2)}dz\quad\text{つまり}\quad S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds$$

を得る．

(3)　$\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds=\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\cdot e^{-t^2}ds=e^{-t^2}\int_{-a}^{a}e^{-s^2}ds$ なので，(2)の結果は $S(t)\leqq e^{-t^2}\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-s^2}ds$ と表せる．

この両辺を $-a\leqq t\leqq a$ で積分すると

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\int_{-a}^{a} S(t)dt \leqq \int_{-a}^{a}\left\{e^{-t^2}\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds\right\}dt \iff V \leqq \int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds\int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt$$

$$\iff V \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2$$

を得る．$V=\pi(1-e^{-a^2})$，$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx \geqq 0$ より $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$ となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。